# 第15講　ちょっと訳あり増減

15

［A］ 座標平面上の曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ において，この曲線上の点 $(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ における法線（接線と接点で直交する直線）と $x$ 軸との交点を P，この法線と直線 $y=x$ との交点を Q とする．原点と点 P，点 Q で作られる三角形 OPQ の面積を $S(\theta)$ とする．$S(\theta)$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ で最大値をとる関数であることを示せ．

［B］ 平面上に二つの曲線

$$C：y=e^{2x}+1,$$
$$D：y=-x^2+14x-49$$

がある．

(1) $C$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における $C$ の接線と $D$ 上の点 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ における $D$ の接線が平行であるとき，$x_2$ を $x_1$ で表せ．

(2) $D$ 上の点 Q を固定し，$C$ 上の点 P を動かすときに，線分 PQ の長さは点 $\mathrm{P}_0$ で最小になるとする．このとき $C$ の $\mathrm{P}_0$ での接線は，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}$ と直交することを証明せよ．

(3) 点 P，Q がそれぞれ $C$ 上と $D$ 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第15講　ちょっと訳あり増減

**15**　ABを直径とする半径1の半円がある．Pを半円周上の動点とし，$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とおくとき，Pは $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ を満たす範囲を動く．直径ABと弦APと $\overset{\frown}{\mathrm{PB}}$ で囲まれた部分の面積を $T(\theta)$ で表す．

(1)　$T(\theta)$ を求めよ．

(2)　Pが半円周上を $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，線分APを折り目にしてこの半円を折り重ね，重なった部分の面積を $S(\theta)$ とおく．このとき $S(\theta)$ を $T(\theta)$ と $T(2\theta)$ を用いて表せ．

(3)　(2)の $S(\theta)$ の最大値を与える $\theta$ の値を $\alpha$ とするとき，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第15講　ちょっと訳あり増減

15

［A］ 座標平面上の曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ において，この曲線上の点 $(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ における法線（接線と接点で直交する直線）と $x$ 軸との交点をP，この法線と直線 $y=x$ との交点をQとする．原点と点P，点Qで作られる三角形OPQの面積を $S(\theta)$ とする．$S(\theta)$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ で最大値をとる関数であることを示せ．

［B］ 平面上に二つの曲線

$$C: y=e^{2x}+1,$$
$$D: y=-x^2+14x-49$$

がある．

(1) $C$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における $C$ の接線と $D$ 上の点 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ における $D$ の接線が平行であるとき，$x_2$ を $x_1$ で表せ．

(2) $D$ 上の点Qを固定し，$C$ 上の点Pを動かすときに，線分PQの長さは点 $\mathrm{P}_0$ で最小になるとする．このとき $C$ の $\mathrm{P}_0$ での接線は，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}$ と直交することを証明せよ．

(3) 点P，Qがそれぞれ $C$ 上と $D$ 上を動くとき，線分PQの長さの最小値を求めよ．

**【答】** ［A］ 略

［B］ (1) $x_2=-e^{2x_1}+7$ (2) 略 (3) $3\sqrt{5}$

**【解説】**

［A］ $\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta(-\sin\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$ より

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) /\!/ (-\cos\theta,\ \sin\theta)$$

となるので，法線は

$$-\cos\theta(x-\cos^3\theta)+\sin\theta(y-\sin^3\theta)=0$$
$$\Longleftrightarrow\quad -\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y+\cos 2\theta=0$$

よって

$$\mathrm{P}\left(\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta},\ 0\right),\ \mathrm{Q}(\sin\theta+\cos\theta,\ \sin\theta+\cos\theta)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}(\cos 2\theta\tan\theta+\cos 2\theta)\\&=\frac{1}{2}\{(2\cos^2\theta-1)\tan\theta+\cos 2\theta\}\\&=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta-\tan\theta)\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって

$$S'(\theta)=\frac{1}{2}\left(2\cos 2\theta-2\sin 2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}\right),$$

$$S''(\theta)=\frac{1}{2}\left(-4\sin 2\theta-4\cos 2\theta-2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)<0,$$

$$S'(0)=\frac{1}{2}>0,\ S'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1+3\sqrt{3}}{6}<0$$

より $S'(\theta)=0$ を満たす実数解 $\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ にただ１つだけ存在し，それを $\alpha$ とおくと $S(\theta)$ の増減は

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | | ↘ | | ↘ | |

となるので，題意は示された.

［B］ (1)　$f(x)=e^{2x}+1$，$g(x)=-x^2+14x-49$ とおくと，

$f'(x)=2e^{2x}$，$g'(x)=-2x+14$ より

$$f'(x_1)=g'(x_2)\iff 2e^{2x_1}=-2x_2+14$$
$$\iff \boldsymbol{x_2=-e^{2x_1}+7}$$

(2)　$h(x)=(x-x_2)^2+\{f(x)-g(x_2)\}^2$ とおくと

$$h'(x)=2(x-x_2)+2\{f(x)-g(x_2)\}f'(x)$$
$$=2(x-x_2)+4\{e^{4x}+e^{2x}-g(x_2)e^{2x}\}$$
$$h''(x)=2[8e^{4x}+4\{1-g(x_2)\}e^{2x}+1]$$

ここで $g(x_2)=-(x_2-7)^2\leqq 0$ より $h''(x)>0$　よって $h'(x)=0$ となるただ１つの実数解 $x$ を $x_1$ とおくと

$$h'(x_1)=0$$
$$\iff 2(x_1-x_2)+2\{f(x_1)-g(x_2)\}f'(x_1)=0$$
$$\iff -\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$$

よって題意は示された.

(3)　(1)，(2)より

$$\begin{cases} x_2=-e^{2x_1}+7 \\ h'(x_1)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2=-e^{2x_1}+7 \\ (x_1-x_2)+2e^{2x_1}\{e^{2x_1}+1+(x_2-7)^2\}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2=-e^{2x_1}+7 \quad \cdots\cdots① \\ x_1+2e^{6x_1}+2e^{4x_1}+3e^{2x_1}-7=0 \quad \cdots\cdots② \end{cases}$$

また(2)より②はただ１つの実数解をもち，それは $x_1=0$ であるので，①より


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$x_2=-e^0+7=6$　よってPQが最小となるとき

$$P(0,\ 2),\ Q(6,\ -1)$$

となるので，その最小値は

$$\sqrt{6^2+(-3)^2}=\mathbf{3\sqrt{5}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 15 講　ちょっと訳あり増減

15　AB を直径とする半径 1 の半円がある．P を半円周上の動点とし，$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とおくとき，P は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす範囲を動く．直径 AB と弦 AP と $\overset{\frown}{\mathrm{PB}}$ で囲まれた部分の面積を $T(\theta)$ で表す．

(1)　$T(\theta)$ を求めよ．

(2)　P が半円周上を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，線分 AP を折り目にしてこの半円を折り重ね，重なった部分の面積を $S(\theta)$ とおく．このとき $S(\theta)$ を $T(\theta)$ と $T(2\theta)$ を用いて表せ．

(3)　(2)の $S(\theta)$ の最大値を与える $\theta$ の値を $\alpha$ とするとき，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ．

**【答】** (1) $\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$　(2) $S(\theta)=T(2\theta)-T(\theta)$　(3) $\cos 2\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

**【解説】**

(1)　$T(\theta)$ は中心角が $2\theta$ の扇形と頂角が $\pi-2\theta$ の二等辺三角形の面積の和であるから

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)$$

$$=\boldsymbol{\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta}$$

(2)　折り返した半円と直径 AB との交点を Q として，点 Q の折り返す前の点を R とすると $\angle \mathrm{QAP}=\angle \mathrm{RAP}=\theta$ より $\angle \mathrm{RAB}=2\theta$ となるので，$\boldsymbol{S(\theta)=T(2\theta)-T(\theta)}$

(3)

$$S(\theta)=\left(2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta\right)-\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$=\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}S(\theta)=1+2\cos 4\theta-\cos 2\theta$$

$$=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1$$

$$\frac{d}{d\theta}S(\theta)=0 \iff 4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1=0$$

$$\iff \cos 2\theta=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$$

$0<\cos 2\theta<1$ より

$$\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\cos 2\theta = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ を満たす $\theta$ を $\theta_0$ とおくと，$S(\theta)$ の増減は

| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\theta_0$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | | ↘ | |

となるので，$\theta=\theta_0$ のとき $S(\theta)$ は最大となる．つまり，$\theta_0=\alpha$ である．よって

$$\boldsymbol{\cos 2\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{8}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。